

1. Hieron király egy aranytömböt adott az aranyművesnek, hogy készítsen belőle koronát. A korona elkészült, de a király attól tartott, hogy az aranyműves meglopta őt, és az arany egy részét kicserélte ezüstre. A korona tömege természetesen pontosan megegyezett a király által adott aranydarab tömegével. A király felkérte Arkhimédészt, hogy döntse el a kérdést, vajon tartalmaz-e ezüstöt is a korona. Arkhimédész fürdés közben rájött arra, hogy a korona térfogatát pontosan meg tudja mérni annak vízkiszorítása által, ha egy vízzel teli edénybe meríti a koronát. A korona térfogatát összehasonlítva a koronával megegyező aranydarab térfogatával, az arany és ezüst sűrűségének ismeretében nemcsak a hamisítás ténye, hanem annak mértéke is meghatározható. A király 1,93 kg aranyból készíttetett koronát, annak térfogata 5 cm^3 -rel meghaladta az 1,93 kg tömegű aranytömb térfogatát. Hány gramm arany és hány gramm ezüst volt a hamisított korona anyagát alkotó arany-ezüst ötvözetben?
(Az arany sűrűsége $19,3 \text{ g/cm}^3$, ezüst sűrűsége $10,5 \text{ g/cm}^3$.)
(2023. október)

Megoldás: (11 pont)

Adatok: $M = 1930 \text{ g}$, $\Delta V = 5 \text{ cm}^3$, $\rho_a = 19,3 \text{ g/cm}^3$, $\rho_e = 10,5 \text{ g/cm}^3$

A korona tényleges térfogatának meghatározása:

3 pont
(bontható)

Mivel az adott tömegű tiszta arany térfogata:

$$V_a = \frac{M}{\rho_a} = 100 \text{ cm}^3 \text{ (képlet + számítás, 1 + 1 pont)}$$

Ezért a korona tényleges térfogata: $V = V_a + \Delta V = 105 \text{ cm}^3$ (1 pont)

A koronában lévő arany térfogatának meghatározása:

6 pont
(bontható)

A korona összetevőire felírható:

I. $m_a + m_e = M \Rightarrow \rho_a \cdot V_a + \rho_e \cdot V_e = M$ (1 pont)

II. $V_a + V_e = V$ (1 pont)

II. segítségével az egyik ismeretlen térfogatot kifejezve:

$$\rho_a \cdot V_a + \rho_e \cdot (V - V_a) = M \text{ (1 pont)}$$

$$\text{tehát } V_a = \frac{M - \rho_e \cdot V}{\rho_a - \rho_e} = 94 \text{ cm}^3 \text{ (rendezés + adatok behelyettesítése + számítás, 1 + 1 + 1 pont)}$$

A koronában lévő arany és ezüst tömegének meghatározása:

1 + 1 pont

$$m_a = V_a \cdot \rho_a = 1814 \text{ g (1 pont), illetve}$$

$$m_e = M - m_a = 116 \text{ g (1 pont)}$$

Összesen: 11 pont

2. Egy 5,6 mm átmérőjű nyaki verőérben a vér áramlásának átlagos sebessége egy egészséges embernél 60 mm/s.
- a) Percenként mennyi vér áramlik át ezen az éren? Egy beteg érfalán egy szakaszon lerakódások vannak. A vér átlagos áramlási sebességét a nyaki verőér ultrahangos vizsgálata során 135 mm/s-nak találták ezen a szakaszon.
- b) Közelítőleg milyen vastag a lerakódás, ha feltesszük, hogy a többi érszakaszon az áramlás sebessége az egészséges érték, és a beteg szakaszon a lerakódás egyenletesen borítja az érfalat?
- (2024. október)

Megoldás: (11 pont)

Adatok: $D_1 = 5,6 \text{ mm}$, $v_1 = 60 \text{ mm/s}$, $v_2 = 135 \text{ mm/s}$, $\Delta t = 60 \text{ s}$.

- a) Az egészséges érszakaszon percnként átáramló vér térfogatának meghatározása:

4 pont
(bontható)

$$V = A \cdot v \cdot \Delta t = \frac{D_1^2}{4} \cdot \pi \cdot v \cdot \Delta t = 88668 \text{ mm}^3 \approx 89 \text{ cm}^3$$

(képlet + adatok behelyettesítése + számítás, 2 + 1 + 1 pont)

- b) A kontinuitási egyenlet felírása a vér áramlására az egészséges, illetve a beteg szakaszokon:

2 pont

Az érkeresztmetszetek felületének segítségével: $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

A beteg érszakasz sugarának kiszámítása és a lerakódás vastagságának meghatározása:

5 pont
(bontható)

Az ér belső keresztmetszetének sugarát r -el jelölve a kontinuitási egyenletből:

$$r_2^2 = \frac{v_1}{v_2} \cdot r_1^2, \text{ azaz } r_2 = r_1 \cdot \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 1,87 \text{ mm}$$

(képlet + adatok behelyettesítése + számítás, 2 + 1 + 1 pont)

amiből a lerakódás vastagságára $d = r_1 - r_2 = 0,93 \text{ mm}$ (1 pont) adódik.

Összesen: 11 pont